Математика

Задача 1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж области интегрирования.

$$\int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\,.$$

Решение:

$$\int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

Сделаем чертеж.

$y=\sqrt{4-x^2}$ – уравнение верхней части окружности $x^2+y^2=2^2$ с центром в точке $(0;\,0)$ и радиуса $R=2$.

$y=2-x$ – уравнение прямой, проходящей через точки $(0;\,2)$ и $(2;\,0)$.

Найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=2-x \end{cases}$$

$$\sqrt{4-x^2}=2-x$$

$$4-x^2=(2-x)^2$$

$$4-x^2=4-4x+x^2$$

$$2x^2-4x=0$$

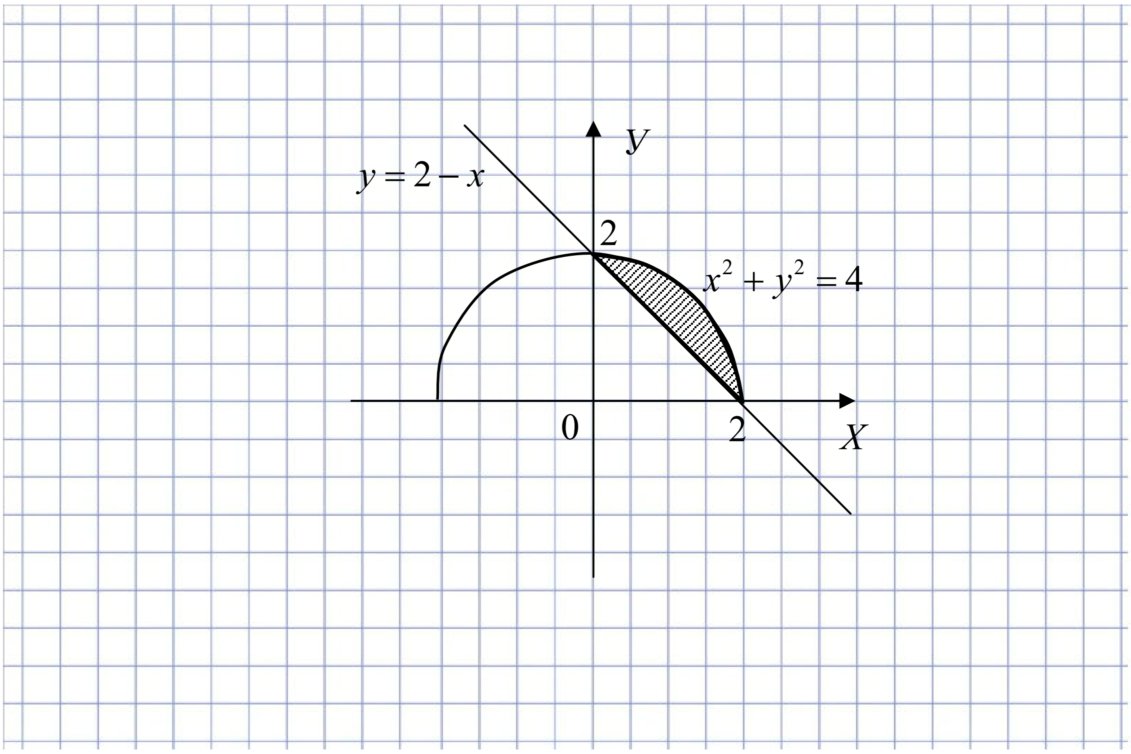
$$2x\cdot(x-2)=0$$

$$x_1=0 \qquad x_2=2$$

$$y_1=2 \qquad y_2=0$$

Если $y=\sqrt{4-x^2}$, то $x=\sqrt{4-y^2}$ .

Если $y=2-x$, то $x=2-y$.




Пределы внешнего интегрирования (по $y$) от 0 до 2, внутреннего (по $x$) от $2-y$ до прямой $x=\sqrt{4-y^2}$.

Двойной интеграл имеет вид:

$$\int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

Ответ: $\int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать рисунок данного тела и его проекции на плоскость $xOy$.

3. $y + x = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 9 - y^2$.

Решение:

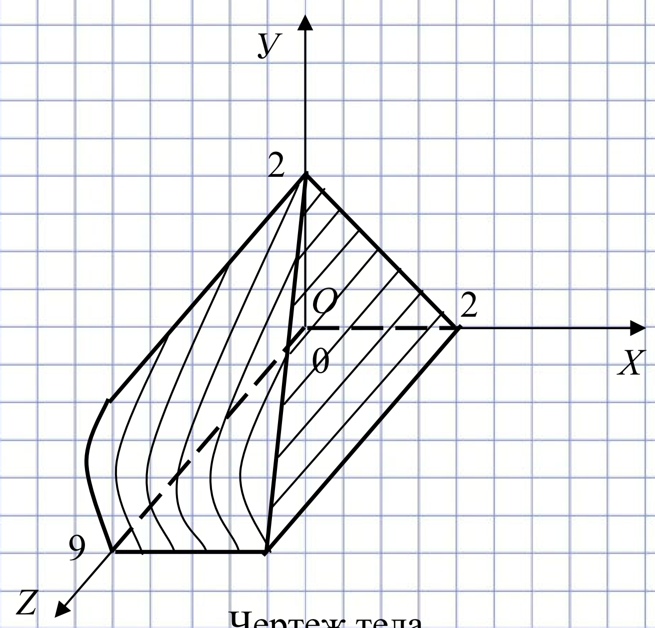
$x = 0$ задает плоскость $YOZ$, проходящую через ось $OY$;

$y = 0$ задает плоскость $XOZ$, проходящую через ось $OX$;

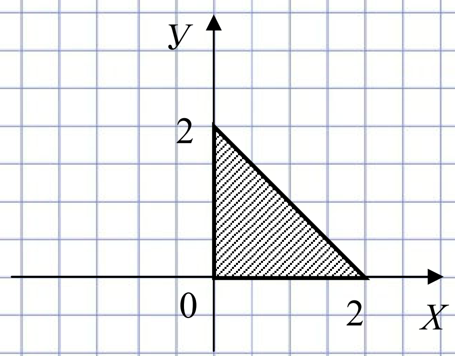
$z = 0$ задает плоскость $XOY$, проходящую через ось $OZ$;

$y + x = 2$ задает плоскость, которая проходит через прямую $y + x = 2$ параллельно оси $OZ$;

$z = 9 - y^2$ описывает параболический цилиндр.




Чертеж тела




Проекция тела на плоскость $XOУ$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_0^{9-y^2} dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\cdot z\Big|_0^{9-y^2}=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}\left(9-y^2\right)dy=\int\limits_0^2 dx\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}=$$

$$=\int\limits_0^2\left(9\cdot(2-x)-\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=-\int\limits_0^2\left(9\cdot(2-x)-\frac{(2-x)^3}{3}\right)d(2-x)=$$

$$=-\left(9\cdot\frac{(2-x)^2}{2}-\frac{(2-x)^4}{3\cdot 4}\right)\Bigg|_0^2=-\left(\frac{9}{2}\cdot(2-x)^2-\frac{(2-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=-\left(\frac{9}{2}\cdot(2-2)^2-\frac{(2-2)^4}{12}\right)+\left(\frac{9}{2}\cdot(2-0)^2-\frac{(2-0)^4}{12}\right)=$$

$$=18-\frac{4}{3}=16\frac{2}{3}\ (\textit{кв. ед.})$$

Ответ: $V=16\frac{2}{3}$ *кв. ед.*

Задача 3. Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью достаточных признаков сходимости.

3. $a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3^n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{25n-1}\right)^{\frac{n}{2}};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n}.$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3^n}$$

Исследуем ряд по признаку Даламбера: если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1,$ то ряд сходится; если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,$ то ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2+2}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^2+2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot 3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2}{n^2+2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+2}{n^2+2}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{n^2+2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+0+0}{1+0}=\frac{1}{3}<1$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3^n}$ сходится по признаку Даламбера.

Ответ: ряд сходится.

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{25n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Используем радикальный признак Коши: если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1,$ то ряд сходится; если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1,$ то ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{25n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{25n-1}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{25n}{n}-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{25-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{25-0}}=\frac{1}{5}<1$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{25n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ сходится по радикальному признаку Коши.

Ответ: ряд сходится.

*в*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n}$

Исследуем ряд по интегральному признаку Коши: положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{4x^2+4x}=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x(x+1)}=$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

$$\begin{cases}A=1\\A+B=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=1\\B=-A=-1\end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b-\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to\infty}\ln|x+1|\Big|_1^b=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^b=\frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{b}{b+1}\right|-\frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{1}{1+1}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ln 2$$

Интеграл сходится, следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n}$ сходится по интегральному признаку Коши.

Ответ: ряд сходится.

Задача 4. Найти область сходимости степенного ряда.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\sqrt[3]{n}}.$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\sqrt[3]{n}}$$

$$u_n=\frac{1}{n\sqrt[3]{n}};\ u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$$

Используя признак Даламбера, ищем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1+0}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{1+0}}=1$$

Интервал сходимости:

$$-1<x-4<1$$

$$3<x<5$$

Исследуем граничные точки этого интервала.

При $x=5$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-4)^n}{n\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}.$

Используем интегральный признак Коши: положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\frac{4}{3}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\left(\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}\right)\right|_1^b=-3\lim_{b\to\infty}\left.x^{-\frac{1}{3}}\right|_1^b=$$

$$=-3\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right|_1^b=-3\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{b}}-\frac{1}{\sqrt[3]{1}}\right)=-3\cdot(0-1)=3$$

Интеграл сходится, следовательно, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ сходится по интегральному признаку Коши.

При $x=3$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4)^n}{n\sqrt[3]{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}}$ сходится, поскольку сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}}\right|$.

Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\sqrt[3]{n}}$: $3\le x\le 5$.

Задача 5. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

3. $y' - yctgx = \sin 2x, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Решение:

$y' - yctgx = \sin 2x$

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, следовательно, имеем линейное уравнение первого порядка.

Полагаем $y = u \cdot \upsilon$, $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$ и подставляем в заданное уравнение:

$u'\upsilon + \upsilon' u - ctgx \cdot u\upsilon = \sin 2x$

Группируем члены:

$$u'\upsilon + u \cdot \left(\upsilon' - ctgx \cdot \upsilon\right) = \sin 2x \qquad (2)$$

и полагаем $\upsilon' - ctgx \cdot \upsilon = 0$ (3)

Остается $u'\upsilon = \sin 2x$ (4)

Находим сначала $\upsilon$ из (3):

$\upsilon' - ctgx \cdot \upsilon = 0$

$\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \upsilon$

$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\ln|\upsilon| = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$\ln|\upsilon| = \ln|\sin x|$

$\ln|\upsilon| = \ln|\sin x|$

$\underline{\upsilon = \sin x}$

Подставляем найденную функцию $\upsilon = \sin x$ в (4) и получаем:

$\frac{du}{dx} \cdot \sin x = \sin 2x$

$$\frac{du}{dx}\cdot\sin x = 2\sin x\cdot\cos x$$

$$\frac{du}{dx} = 2\cos x$$

$$u = 2\int\cos x dx = 2\sin x + C$$

Запишем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = u\upsilon = \left(2\sin x + C\right)\cdot\sin x$$

Подставим заданное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$:

$$\left(2\sin\frac{\pi}{4} + C\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 0$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + C = 0$$

$$C = -\sqrt{2}$$

Частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y = \left(2\sin x - \sqrt{2}\right)\cdot\sin x$$

Ответ: $y = \left(2\sin x - \sqrt{2}\right)\cdot\sin x$.

Задача 6. Найти частное решение дифференциального уравнения.

3. $y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4,\ y(0) = 0{,}08,\ y'(0) = 0{,}6.$

Решение:

$y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4$ – неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение ищем в виде: $y = \overline{y} + y_0$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\overline{y} = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

или для данного уравнения: $\overline{y} = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$

Частное решение ищем в виде: $y_0 = Ax^2 + Bx + C$, где $A, B, C$ – коэффициенты, которые нужно определить.

$$y_0' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B$$

$$y_0'' = \left(2Ax + B\right)' = 2A$$

Подставим $y_0'', y_0', y_0$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$2A - 4 \cdot (2Ax + B) + 5 \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = 5x^2 - 4$$

$$2A - 8Ax - 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 - 4$$

$$5Ax^2 + (-8A + 5B)x + (2A - 4B + 5C) = 5x^2 - 4$$

Приравниваем коэффициенты, стоящие перед $x^2, x^1, x^0$ в левой и правой частях полученного равенства:

$$\begin{aligned} x^2 &: \begin{cases} 5A = 5 \\ -8A + 5B = 0 \\ 2A - 4B + 5C = -4 \end{cases} \\ x^1 &: \\ x^0 &: \end{aligned}$$

$$A = 1$$

$$B = \frac{8}{5} \cdot A = \frac{8}{5} \cdot 1 = \frac{8}{5}$$

$$C = \frac{1}{5} \cdot \left(-4 - 2A + 4B\right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(-4 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{8}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(-6 + \frac{32}{5}\right) = \frac{2}{25}$$

Получили частное решение:

$$y_0 = x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{2}{25}$$

Таким образом, общее решение следующее:

$$y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{2}{25}$$

Тогда $y' = 2c_1 e^{2x} \cos x - c_1 e^{2x} \sin x + 2c_2 e^{2x} \sin x + c_2 e^{2x} \cos x + 2x + \frac{8}{5}$

Подставим заданные начальные условия $y(0) = 0{,}08,\ y'(0) = 0{,}6$:

$$\begin{cases} c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0 + 0^2 + \frac{8}{5} \cdot 0 + \frac{2}{25} = 0{,}08 \\ 2c_1 e^0 \cos 0 - c_1 e^0 \sin 0 + 2c_2 e^0 \sin 0 + c_2 e^0 \cos 0 + 2 \cdot 0 + \frac{8}{5} = 0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_1 + 1{,}6 = 0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 0{,}08,\ y'(0) = 0{,}6$:

$$y = -e^{2x} \sin x + x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{2}{25}$$

Ответ: $y = -e^{2x}\sin x + x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{2}{25}$.

Задача 8. Семена некоторого растения прорастают с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что из 2000 посаженных семян прорастет: а) 1600 семян; б) не менее 1600 семян.

Решение:

Вероятность того, что отдельное растение прорастет: $p = 0,8$;

вероятность того, что отдельное растение не прорастет:

$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2.$

1) Если вероятность наступления события $A$ в каждом из $n$ независимых испытаний постоянная и равна $p$ ($p$ отлична от нуля и единицы), а число $n$ достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие $A$ наступит $k$ раз, вычисляется приближенно по локальной теореме Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

По условию имеем: $n = 2000, p = 0,8, q = 0,2, k = 1600$.

Найдем значение аргумента $x$:

$$x = \frac{1600 - 2000 \cdot 0,8}{\sqrt{2000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0$$

Находим по таблице значений $\varphi(0) = 0,3989$, тогда

$$P_{2000}(1600) \approx \frac{1}{\sqrt{2000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \cdot 0,3989 = 0,0223$$

2) Согласно интегральной теореме Лапласа, если вероятность события $A$ в каждом из $n$ независимых испытаний постоянна и равна $p$, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие $A$ появится не менее $k_1$ раз и не более $k_2$ раз, приближенно определяется формулой:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

По условию имеем: $n = 110, p = 0,8, q = 0,2, k_1 = 1600; k_2 = 2000.$

Вычислим $x_1$ и $x_2$:

$$x_1 = \frac{1600 - 2000 \cdot 0,8}{\sqrt{2000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0$$

$$x_2 = \frac{2000 - 2000 \cdot 0,8}{\sqrt{2000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 22,4$$

$$P_{2000}(1600;\ 2000) \approx \Phi(22,4) - \Phi(0) = 0,5 - 0 = 0,5$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа (значение определяется по таблице).

Ответ: а) $P_{2000}(1600) = 0,0223$; б) $P_{2000}(1600;\ 2000) = 0,5$.